## *XV олимпиада по математике имени В.А.Курова.*
## 2017 – 2018 уч. год.

**8** класс.

***<u>Задача №1.</u>*** Сократите дробь:

$$\frac{x^4-3x^2+1}{(3x^2+3x-3)^2}$$

***<u>Задача №2.</u>*** На вечеринку пришли 100 человек. Затем те, у кого не было знакомых среди пришедших, ушли. Затем те, у кого был ровно 1 знакомый среди оставшихся, тоже ушли. Затем аналогично поступали те, у кого было ровно 2, 3, 4, . . . , 99 знакомых среди оставшихся к моменту их ухода. Какое наибольшее число людей могло остаться в конце?

***<u>Задача №3.</u>*** Имеются три слитка: первый – сплав меди и никеля; второй – сплав никеля с цинком; третий – сплав цинка с медью. Если сплавить первый со вторым, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в первом слитке. Если сплавить второй с третьим, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во втором слитке. Какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплавлении всех трех слитков, если во втором слитке цинка 10%, а в третьем 7% ?

***<u>Задача №4.</u>*** В параллелограмме проведены биссектрисы углов между диагоналями. Доказать, что точки пересечения биссектрис со сторонами параллелограмма являются вершинами некоторого ромба.

**Оргкомитет олимпиады.**

# **Ответы 8 класс**

***Задача №1.***

**Ответ:** $\frac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}$

**Решение:** $\frac{(x^2-1)^2-x^2}{9(x^2+x-1)^2}=\frac{(x^2-1+x)(x^2-x-1)}{9(x^2+x-1)^2}=\frac{x^2-x-1}{9(x^2+x-1)}$

***Задача №2.***

**Ответ:** 98 человек.

**Решение:** Нетрудно проверить, что если все пришедшие, кроме двух человек $A$ и $B$, были знакомы между собой, то в конце должны были остаться все, кроме $A$ и $B$, т. е. 98 человек. Докажем, что не могло остаться 99 человек. Ясно, что человек $A$, имевший изначально меньше всех знакомых ($k$), в некоторый момент уйдет. Если больше никто не ушел, то все остальные (кроме $A$) имели больше $k$ знакомых до ухода $A$ и меньше $k$ +1 после его ухода. Но тогда $A$ должен быть знаком со всеми остальными, т. е. $k$ = 99, что противоречит строгой минимальности $k$.

***Задача №3.***

**Ответ:** 6%.

**Решение:** Если сплавить первый слиток со вторым, то процент меди в полученном сплаве будет в 2 раза меньше, чем он был в первом слитке. Так как во втором сплаве меди нет, то уменьшение процентного содержания меди в 2 раза возможно лишь при условии, что масса нового сплава в 2 раза больше массы первого слитка. Тогда массы двух первых слитков равны, обозначим их **m** г.

Если сплавить второй слиток с третьим, то процент никеля в полученном сплаве будет в 3 раза меньше, чем он был во втором слитке. Так как в третьем сплаве никеля нет, то уменьшение процентного содержания никеля в 3 раза возможно лишь при условии, что масса нового сплава в 3 раза больше массы второго слитка. Тогда масса третьего слитка в 2 раза больше массы второго, обозначим массу третьего слитка **2m** г.

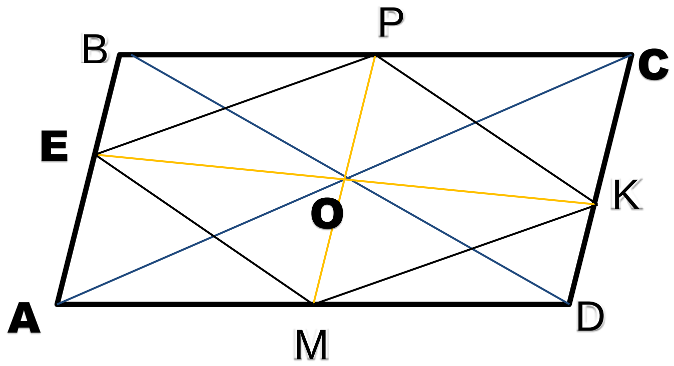
Определим, какой процент цинка будет содержать слиток, полученный при сплавлении всех трех слитков:

$$\frac{(0{,}1m+0{,}07\cdot 2m)\cdot 100\%}{m+m+2m}=6\%$$

***Задача №4.***

**Решение:** Пусть в параллелограмме ABCD AC и BD – диагонали, OE – биссектриса ∠ AOB, OP – биссектриса ∠BOC, OK – биссектриса ∠COD, OM – биссектриса ∠AOD. Докажем, что EPKM – ромб.

Так как O – центр симметрии параллелограмма, то OP=OM, OE=OK, то есть EPKM – параллелограмм. Так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны, то PO⊥OK. Но если диагонали параллелограмма взаимно перпендикулярны, то он является ромбом.



B
P
C
E
K
O
A
M
D